

Module 9 - Tests d'hypothèses, partie 1

STT-1000 Probabilités et statistique

Département de mathématiques et de statistique



UNIVERSITÉ
LAVAL

Introduction

Des hypothèses de recherche

Une question de recherche est souvent liée à un paramètre d'une population d'intérêt :

- La crue printanière moyenne d'une rivière est supérieure à 8 m.
- L'écart-type de l'épaisseur des pistons produits par une usine est inférieur à 0,01 cm.
- Le taux moyen de contaminants diminue après la filtration.

Hypothèse statistique

Hypothèse statistique

Énoncé sur la loi de probabilité que suit une variable aléatoire (ou sur ses paramètres).

Exemples :

Une population

- $\mu \neq 10$
- $\mu > 3$
- $\sigma^2 = 4$

Plusieurs populations

- $\mu_1 > \mu_2$
- $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$
- $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$

Test d'hypothèses

Dans un **test d'hypothèses**, on confronte deux hypothèses. Par exemple,

$$H_0 : \mu = 10 \quad \text{contre} \quad H_1 : \mu > 10.$$

H_0 : l'hypothèse nulle. Considérée comme vraie *a priori*, celle qui n'entraîne aucun changement (statu quo).

Test d'hypothèses

Dans un **test d'hypothèses**, on confronte deux hypothèses. Par exemple,

$$H_0 : \mu = 10 \quad \text{contre} \quad H_1 : \mu > 10.$$

H_0 : l'hypothèse nulle. Considérée comme vraie *a priori*, celle qui n'entraîne aucun changement (statu quo).

H_1 : l'hypothèse alternative. Celle que l'on cherche à démontrer avec preuves à l'appui.

Test d'hypothèses

Dans un **test d'hypothèses**, on confronte deux hypothèses. Par exemple,

$$H_0 : \mu = 10 \quad \text{contre} \quad H_1 : \mu > 10.$$

H_0 : l'hypothèse nulle. Considérée comme vraie *a priori*, celle qui n'entraîne aucun changement (statu quo).

H_1 : l'hypothèse alternative. Celle que l'on cherche à démontrer avec preuves à l'appui.

On suppose que H_0 est vraie jusqu'à ce qu'une preuve suffisante que H_0 n'est pas vraie ait été amassée. La preuve provient des données qui sont observées (données probantes).

Remarques

- H_0 et H_1 sont toujours incompatibles (les événements des deux hypothèses sont mutuellement exclusifs).
- Dans notre cours, H_0 sera toujours une hypothèse simple ($\mu=10$).
- H_1 peut avoir une forme bilatérale ($\mu \neq 10$) ou unilatérale ($\mu < 10$ ou $\mu > 10$).
- C'est l'hypothèse de recherche qui dicte le sens de H_1 .

QUIZ!

Vous devez valider qu'une structure de béton a une résistance moyenne supérieure à 80 MPa. Vous prélèverez 10 carottes à analyser.

1. Quelles sont vos hypothèses statistiques?
2. Vous obtenez une moyenne échantillonnale de $\bar{x} = 81,6$ MPa. Pouvez-vous conclure que votre hypothèse est vérifiée?

Règle de décision

Issue d'un test : Rejeter ou non H_0 .

Une **règle de décision** est formulée avant d'observer les données. Elle prend la forme d'une **région critique** qui définit pour quels échantillons H_0 sera rejetée.

Par exemple, pour

$$H_0 : \mu = 10 \quad \text{contre} \quad H_1 : \mu > 10.$$

on pourrait choisir de

rejeter H_0 si $\bar{x} > 11$.

Comment choisir cette valeur critique ?

Deux erreurs possibles à l'issue d'un test d'hypothèses

Décision	Réalité (inconnue!)	
	H_0 est vraie	H_0 est fausse
On rejette H_0	Erreur de type I	
On ne rejette pas H_0		Erreur de type II

Quantités liées aux deux erreurs possibles

On aimerait contrôler les quantités suivantes :

$$\begin{aligned}\alpha &= P(\text{erreur de type I}) \\ &= P(\text{rejeter } H_0 | H_0 \text{ vraie}) \\ &= \underline{\text{seuil du test}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}1 - \beta &= P(\text{rejeter } H_0 | H_0 \text{ fausse}) \\ &= P(\text{rejeter } H_0 | H_1 \text{ vraie}) \\ &= \underline{\text{puissance du test}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta &= P(\text{erreur de type II}) \\ &= P(\text{ne pas rejeter } H_0 | H_0 \text{ fausse})\end{aligned}$$

Quelques remarques

- **L'erreur de type I est la plus grave**, donc α est fixé par le chercheur à une faible valeur (souvent $\alpha = 0,05$ ou $0,01$).
- Plus α est petit, plus β est grand...
on contrôlera souvent β avec la taille d'échantillon.

Exemple 1

Une usine affirme qu'elle ne pollue pas le lac avoisinant et que la concentration moyenne de mercure dans le sol au fond du lac ne dépasse pas 0,1 ppm.

Un biologiste souhaite démontrer le contraire.

Il prévoit tirer 10 prélèvements du sol au fond du lac et en mesurer la concentration de mercure. Il suppose que les concentrations sont i.i.d. $N(\mu, 0,02^2)$. Les hypothèses sont :

H_0 :

H_1 :

Exemple 1 (suite)

Le biologiste hésite entre deux règles de décision.

Règle 1 Rejeter H_0 si la concentration moyenne des 10 prélèvements est supérieure à 0,11.

Règle 2 Rejeter H_0 si la concentration moyenne des 10 prélèvements est supérieure à 0,12.

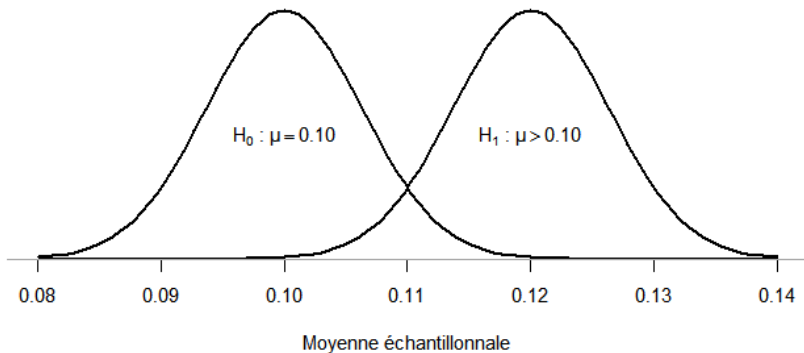
Exemple 1 (suite)

Le biologiste hésite entre deux règles de décision.

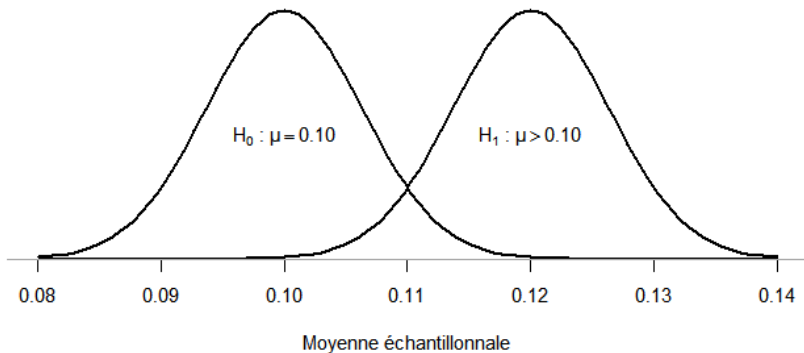
- Règle 1 Rejeter H_0 si la concentration moyenne des 10 prélèvements est supérieure à 0,11.
- Règle 2 Rejeter H_0 si la concentration moyenne des 10 prélèvements est supérieure à 0,12.

- Comment se comparent les seuils associés à ces deux règles ?
- Si la vraie concentration moyenne est $\mu = 0,12$, laquelle des deux règles mène à la plus grande probabilité d'erreur de type II ? À la plus grande puissance ?

Exemple 1 : Règle 1, rejet de H_0 si $\bar{x} > 0,11$



Exemple 1 : Règle 2, rejet de H_0 si $\bar{x} > 0,12$



Exemple 1 : Calculs complets

Vous pourrez vérifier en exercice les valeurs des probabilités d'erreur suivantes :

Probabilité	Règle de décision	
	Rejeter H_0 si $\bar{x} > 0,11$	Rejeter H_0 si $\bar{x} > 0,12$
α	0,057	0,0008
β (pour $\mu = 0,12$)	0,057	0,5
$1 - \beta$ (pour $\mu = 0,12$)	0,943	0,5

5 cas étudiés

La règle de rejet de H_0 doit être basée sur la distribution échantillonnale de notre estimateur ($\bar{X}$ ou S^2). Nous considérerons 5 situations pour les tests d'hypothèses à un échantillon (les mêmes que pour les intervalles de confiance (IC)) :

Cas	Hyp. nulle	Stat. de test	Situation
1	$H_0 : \mu = \mu_0$	Z_0	$X_1, \dots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$ avec σ^2 connue
2		T_0	$X_1, \dots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$ avec σ^2 inconnue
3		Z_0	$X_1, \dots, X_n \sim$ loi inconnue, mais n est grand
4	$H_0 : p = p_0$	Z_0	$X_1, \dots, X_n \sim \text{Bernoulli}(p)$, n assez grand
5	$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$	U_0	$X_1, \dots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$

Tests d'hypothèses sur la moyenne d'une distribution normale de variance connue

Cas 1 : Tests sur μ , loi normale, σ^2 connue

Supposons un échantillon aléatoire $X_1, \dots, X_n$ issu d'une population $N(\mu, \sigma^2)$ où μ est inconnue mais σ^2 est connue.

Objectif : Tester si l'échantillon contient suffisamment de "preuves" pour rejeter $H_0 : \mu = \mu_0$, où μ_0 est une valeur donnée.

Trois hypothèses alternatives possibles :

$H_1 : \mu \neq \mu_0$ (bilatérale)

$H_1 : \mu < \mu_0$ (unilatérale à gauche)

$H_1 : \mu > \mu_0$ (unilatérale à droite)

Hypothèse alternative bilatérale

Tester $H_0 : \mu = \mu_0$ contre $H_1 : \mu \neq \mu_0$.

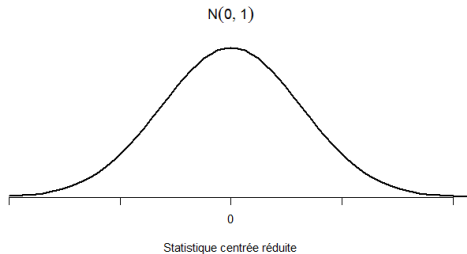
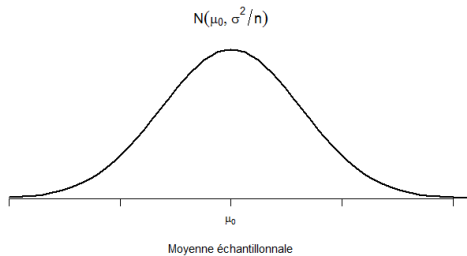
On se doute que si $\bar{x}$ s'éloigne trop de μ_0 , c'est que H_0 est probablement fausse.

Pour déterminer à partir de quelles valeurs $\bar{x}$ "s'éloigne trop" de μ_0 , on fixe le seuil α à une petite valeur, comme 0,05 ou 0,01.

on cherche C telle que

$$\begin{aligned}\alpha &= P(\text{Rejeter } H_0 \mid H_0 \text{ est vraie}) \\ &= P(|\bar{X} - \mu_0| > C \mid H_0 \text{ est vraie})\end{aligned}$$

Région critique bilatérale



Région critique bilatérale

Autrement dit, on rejette H_0 au seuil α quand

$$|\bar{X} - \mu_0| > z_{\alpha/2} \sigma / \sqrt{n}.$$

Une façon un peu plus efficace d'écrire cette règle est de définir

$$Z_0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

et de dire que l'on rejette H_0 (au profit de $H_1 : \mu \neq \mu_0$) quand $|z_0| > z_{\alpha/2}$.

Hypothèses alternatives unilatérales

H_1 unilatérale à droite :

Si on veut tester $H_0 : \mu = \mu_0$ contre $H_1 : \mu > \mu_0$ alors on rejette H_0 si $\bar{x}$ est suffisamment plus élevée que μ_0 .

Pour obtenir un test de seuil α , on rejette H_0 si $z_0 > z_\alpha$.

Hypothèses alternatives unilatérales

H_1 unilatérale à droite :

Si on veut tester $H_0 : \mu = \mu_0$ contre $H_1 : \mu > \mu_0$ alors on rejette H_0 si $\bar{x}$ est suffisamment plus élevée que μ_0 .

Pour obtenir un test de seuil α , on rejette H_0 si $z_0 > z_\alpha$.

H_1 unilatérale à gauche :

De même, si on veut tester $H_0 : \mu = \mu_0$ contre $H_1 : \mu < \mu_0$ alors on rejette H_0 pour de faibles valeurs de $\bar{x}$, soit lorsque $z_0 < -z_\alpha$.

Exemple 2

Une compagnie affirme que le remboursement d'impôt moyen aux étudiants qui ont utilisé son service est d'au moins 1100 \$.

Un échantillon aléatoire de 20 étudiants ayant utilisé le service ont obtenu un remboursement moyen de 1060 \$.

En supposant une distribution normale d'écart-type 100 \$ pour le remboursement d'un étudiant, peut-on conclure que la compagnie fait de la fausse publicité, au seuil $\alpha = 0,05$?

1. Hypothèses :

2. Règle de décision :

Exemple 2 (suite)

3. Calcul de la statistique observée :

4. Décision :

L'hypothèse nulle...

5. Conclusion : (dans les termes de l'étude)

Au seuil de 5%, le remboursement moyen ...

Le seuil observé ou valeur-p d'un test (*p-value*)

Seuil observé ou valeur-p

Le seuil observé d'un test, noté α^* , est la **plus petite valeur de α** pour laquelle cet échantillon nous permettrait de rejeter H_0 .

α^* peut être vu comme la **probabilité d'observer un autre échantillon «au moins aussi extrême» sous H_0** .

Le seuil observé ou valeur-p d'un test (*p-value*)

Seuil observé ou valeur-p

Le seuil observé d'un test, noté α^* , est la **plus petite valeur de α** pour laquelle cet échantillon nous permettrait de rejeter H_0 .

α^* peut être vu comme la **probabilité d'observer un autre échantillon «au moins aussi extrême» sous H_0** .

$$\text{On rejette } H_0 \text{ au seuil } \alpha \quad \Leftrightarrow \quad \alpha^* \leq \alpha.$$

Interprétation du seuil observé

α^* peut s'interpréter comme une mesure de la compatibilité entre H_0 et les observations, c'est la significativité statistique du test.

Interprétation du seuil observé

α^* peut s'interpréter comme **une mesure de la compatibilité entre H_0 et les observations**, c'est la significativité statistique du test.

Plus la valeur-p est faible, moins notre échantillon semble plausible sous H_0 .

Interprétation du seuil observé

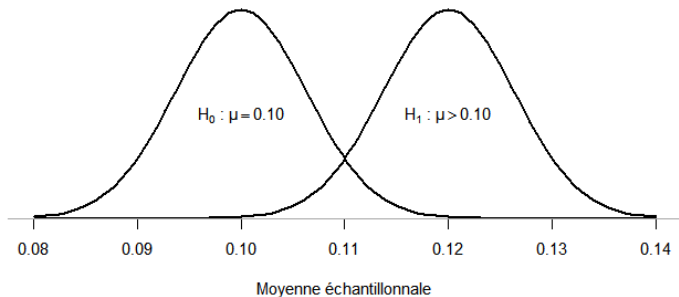
α^* peut s'interpréter comme **une mesure de la compatibilité entre H_0 et les observations**, c'est la significativité statistique du test.

Plus la valeur-p est faible, moins notre échantillon semble plausible sous H_0 .

Attention! La valeur-p ne donne pas d'information sur la distance entre μ_0 et le "vrai" μ (ou n'importe quel paramètre d'intérêt).

Exemple 1 (retour)

Retournons à l'exemple sur la concentration de mercure. Si la concentration moyenne observée pour les 10 prélèvements est de 0,111 ppm, quel est le seuil observé du test ?



Exemple 1 (suite)

QUIZ!

Vous faites un test sur 20 observations pour confronter les hypothèses $H_0 : \mu = 5$ et $H_1 : \mu < 5$. Vous obtenez un seuil observé (valeur-p) de 0,09.

Vrai, faux ou manque d'information ?

1. La moyenne échantillonnale est inférieure à 5.
2. Vous rejetez H_0 au seuil de 5%.
3. Vous rejetez H_0 au seuil de 10%.
4. Vous rejetez $H_0 : \mu = 4$ contre $H_1 : \mu < 4$ au seuil de 5%.
5. Vous rejetez $H_0 : \mu = 6$ contre $H_1 : \mu < 6$ au seuil de 5%.
6. Vous refaites l'expérience avec 40 observations. Vous obtenez la même moyenne échantillonnale. Votre seuil observé est alors plus élevé que 0,09 pour le test $H_0 : \mu = 5$ contre $H_1 : \mu < 5$.

Formules pour le seuil observé

De la définition du seuil observé α^* , on peut facilement déduire les formules générales suivantes (pour le cas 1 : loi normale, σ^2 connue) :

- Pour $H_0 : \mu = \mu_0$ contre $H_1 : \mu \neq \mu_0$:
 $\alpha^* = P(|Z| > |z_0|) = 2 P(Z > |z_0|)$. (on note parfois z_{obs} au lieu de z_0 pour la valeur observée de la statistique.)
- Pour $H_0 : \mu = \mu_0$ contre $H_1 : \mu > \mu_0$:
 $\alpha^* = P(Z > z_0)$.
- Pour $H_0 : \mu = \mu_0$ contre $H_1 : \mu < \mu_0$:
 $\alpha^* = P(Z < z_0)$.

Exemple 2 (suite)

Quel est le seuil observé du test réalisé sur la moyenne des remboursements d'impôts ?

Calcul de puissance

- Rappel :

Puissance du test = $P(\text{rejeter } H_0 \mid H_1 \text{ est vraie})$.

- En général, H_1 ne spécifie pas une valeur unique de μ , mais un intervalle de valeurs.
- On calcule la puissance pour une valeur plausible ou arbitraire de μ sous H_1 , que nous noterons μ_1 .

Exemple 3

On pige un échantillon $X_1, \dots, X_{16}$ d'une loi $N(\mu, 64)$ pour tester, au seuil $\alpha = 0,10$:

$$H_0 : \mu = 10$$

$$H_1 : \mu > 10$$

Quelle est la puissance du test si en vérité $\mu = 11$?

Exemple 3 (suite)

Déterminants de la puissance (1/4)

Trois facteurs importants influencent la puissance d'un test :

1. la différence entre μ_0 et μ_1 : plus μ_1 s'éloigne de μ_0 , plus la puissance augmente.

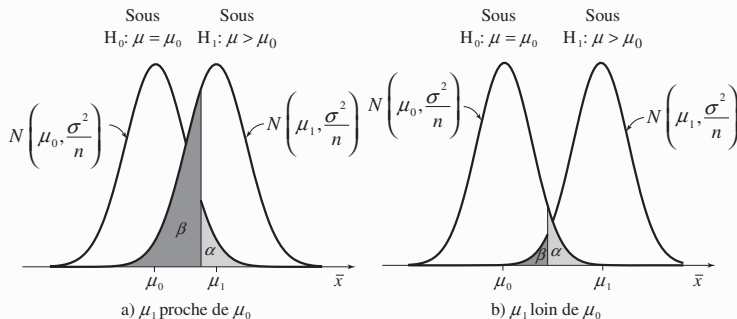


Figure 11.5 L'effet de la distance entre μ_1 et μ_0 sur la valeur de β : a) lorsque μ_1 est proche de μ_0 ; b) lorsque μ_1 est loin de μ_0 .

Déterminants de la puissance (2/4)

2. le seuil du test : plus α augmente, plus la puissance augmente.

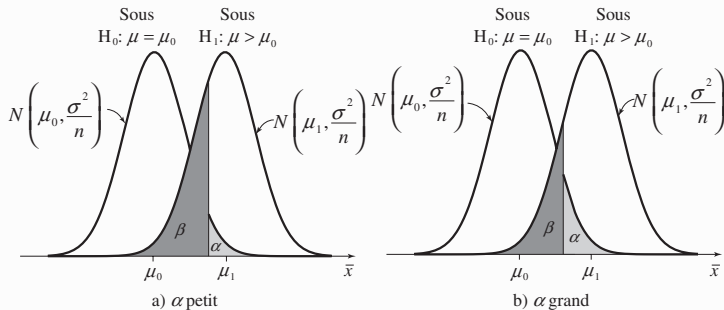


Figure 11.7 L'effet de la valeur de α sur la valeur de β : a) lorsque α est petit; b) lorsque α est grand.

Déterminants de la puissance (3/4)

3. la taille d'échantillon : plus n augmente, plus la puissance augmente.

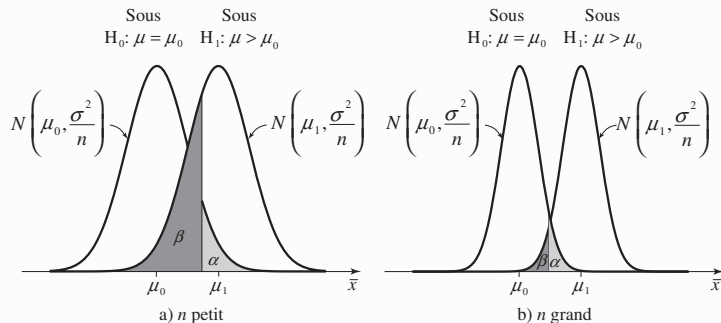


Figure 11.6 L'effet de la taille d'échantillon sur la valeur de β : a) lorsque la taille de l'échantillon (n) est petite ; b) lorsque la taille de l'échantillon (n) est grande.

Déterminants de la puissance (4/4)

1. Le statisticien n'a aucun contrôle sur μ , la vraie valeur de la moyenne. Il peut demander au chercheur la plus petite différence qu'il considère importante.
2. On peut augmenter α pour augmenter la puissance, mais on augmente les chances de faire une erreur de type I.
3. En pratique, la seule option est souvent d'augmenter la puissance en choisissant n suffisamment grand.

Exemple 3 (retour)

On reconsidère notre échantillonnage dans une population $N(\mu, 64)$ pour tester (avec $\alpha = 0, 10$)

$$H_0 : \mu = 10$$

$$H_1 : \mu > 10$$

Quelle est la taille d'échantillon nécessaire pour que la puissance soit de 80% si $\mu = 11$?

Tests d'hypothèses sur la moyenne d'une distribution normale de variance inconnue

Cas 2 : Tests sur μ , loi normale, σ^2 inconnue

Comment faire un test sur μ si la variance est inconnue ?

Le test basé sur Z_0 est inapproprié puisque l'erreur de type I qui serait commise serait supérieure à α .

Si la variance est inconnue, on utilise la statistique

$$T_0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}.$$

Sous H_0 , on sait que $T_0 \sim t_{n-1}$.

Règles de décision

Au seuil α , on rejette $H_0 : \mu = \mu_0 \dots$

- Test bilatéral ($H_1 : \mu \neq \mu_0$) :

on rejette H_0 si $|t_0| > t_{\alpha/2; n-1}$

$$\alpha^* = P(|t_{n-1}| > |t_0|) = 2 P(t_{n-1} > |t_0|)$$

- Test unilatéral à droite ($H_1 : \mu > \mu_0$) :

on rejette $H_0 : \mu = \mu_0$ si $t_0 > t_{\alpha; n-1}$

$$\alpha^* = P(t_{n-1} > t_0)$$

- Test unilatéral à gauche ($H_1 : \mu < \mu_0$) :

on rejette $H_0 : \mu = \mu_0$ si $t_0 < -t_{\alpha; n-1}$.

$$\alpha^* = P(t_{n-1} < t_0)$$

Seuils observés et puissance

Seuils observés :

Dans tous les cas, on peut énoncer la règle suivante :

On rejette H_0 si $\alpha^* < \alpha$.

C'est le calcul de la valeur-p (α^*) qui change selon le test.

Seuils observés et puissance

Seuils observés :

Dans tous les cas, on peut énoncer la règle suivante :

On rejette H_0 si $\alpha^* < \alpha$.

C'est le calcul de la valeur-p (α^*) qui change selon le test.

Puissance :

Les calculs de puissance pour le cas 2 font appel à une loi *t décentrée* et ne seront donc pas couverts dans ce cours.

Exemple 4

Une fabrique achète régulièrement des transistors à un fournisseur. Les données passées montrent que le coefficient d'amplification de ces transistors avait une distribution normale de moyenne 155.

Lors d'un nouveau contrôle sur 20 transistors, on observe un coefficient d'amplification moyen de 152 et un écart-type de 10. Peut-on admettre, au seuil de 1%, que le coefficient moyen a changé ?

1. Hypothèses :

2. Règle de décision :

Exemple 4 (suite)

3. Calcul de la statistique observée :

4. Décision :

L'hypothèse nulle...

5. Conclusion : (dans les termes de l'étude)

Au seuil de 1%, le coefficient d'amplification moyen ...

Tests d'hypothèses sur la moyenne d'une loi inconnue

Cas 3 : Tests sur μ , loi inconnue, n grand

Si la loi théorique des observations en cause est inconnue, comment faire un test sur la moyenne ?

Si n est grand (au moins 30), le test présenté au cas 1 peut être utilisé en remplaçant σ par l'écart-type échantillonnal S dans la définition de Z_0 .

Les probabilités d'erreur de type I et II (α et β) seront alors approximatives (car la loi normale est un modèle approximatif pour $\bar{X}$ lorsque n est grand).

Tests d'hypothèses sur une proportion

Cas 4 : Tests sur p , loi de Bernoulli

On suppose que $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. loi Bernoulli(p), où p est inconnue et où $n \geq 30$.
Les hypothèses du test bilatéral seront :

$$H_0 : p = p_0$$

$$H_1 : p \neq p_0$$

Par le théorème central limite (TCL), nous savons que sous H_0 ,
 $\hat{p} \approx \mathcal{N}(p_0, \frac{p_0(1-p_0)}{n})$ et donc

$$Z_0 = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \approx \mathcal{N}(0, 1)$$

et nous rejetons H_0 si $|z_0| > z_{\alpha/2}$.

Les tests unilatéraux se construisent de façon similaire.

Tests d'hypothèses sur la variance

Cas 5 : Tests sur σ^2 , distribution normale

Si on veut contrôler la variabilité d'un procédé, on peut effectuer un test d'hypothèses portant sur la variance d'une distribution.

Ces tests sont relativement simples dans le cas où nous recueillons un échantillon aléatoire $X_1, \dots, X_n$ issu d'une population $N(\mu, \sigma^2)$.

Test bilatéral

On suppose $X_1, \dots, X_n$ un échantillon aléatoire d'une distribution $N(\mu, \sigma^2)$ pour laquelle on veut tester

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \text{ contre } H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2.$$

On voudra rejeter H_0 lorsque S^2 sera éloignée de σ_0^2 , donc pour des valeurs éloignées de $n - 1$ pour la statistique

$$U_0 = \frac{(n - 1)S^2}{\sigma_0^2}.$$

Test bilatéral

On suppose $X_1, \dots, X_n$ un échantillon aléatoire d'une distribution $N(\mu, \sigma^2)$ pour laquelle on veut tester

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \text{ contre } H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2.$$

On voudra rejeter H_0 lorsque S^2 sera éloignée de σ_0^2 , donc pour des valeurs éloignées de $n - 1$ pour la statistique

$$U_0 = \frac{(n - 1)S^2}{\sigma_0^2}.$$

Si H_0 est vraie, alors $U_0 \sim \chi_{n-1}^2$.

Test de seuil α :

$$\text{on rejette } H_0 \text{ si } u_0 < \chi_{1-\alpha/2; n-1}^2 \text{ ou si } u_0 > \chi_{\alpha/2; n-1}^2.$$

Tests unilatéraux

Au seuil α , on rejette $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \dots$

- Test unilatéral à droite ($H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$) :

on rejette $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ si $u_0 > \chi_{\alpha;n-1}^2$

$$\alpha^* = P(\chi_{n-1}^2 > u_0)$$

- Test unilatéral à gauche ($H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$) :

on rejette $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ si $u_0 < \chi_{1-\alpha;n-1}^2$.

$$\alpha^* = P(\chi_{n-1}^2 < u_0)$$

Exemple 5

On évalue une nouvelle machine pour remplir des sacs de sucre. La compagnie est prête à tolérer une variance de 7 g^2 . Un test sur 31 sacs donne une variance échantillonnale de $8,2 \text{ g}^2$. La variance est-elle trop grande au seuil $\alpha = 0,05$?

1. Hypothèses :

2. Règle de décision :

Exemple 5 (suite)

3. Calcul de la statistique observée :

4. Décision :

L'hypothèse nulle...

5. Conclusion : (dans les termes de l'étude)

Au seuil de 5%, la variance des poids ...

Lien entre intervalles de confiance et tests d'hypothèses bilatéraux

Intervalles de confiance et tests bilatéraux

Il existe une forte relation entre les intervalles de confiance et les tests bilatéraux.

L'examen des régions critiques des tests pour $H_0 : \mu = \mu_0$ vs $H_1 : \mu \neq \mu_0$ montre que

On rejette $H_0 : \mu = \mu_0$ au seuil α	$\Leftrightarrow$	L'intervalle de confiance pour μ de niveau $1 - \alpha$ ne contient pas la valeur μ_0 .
---	-------------------	---

Idem pour σ^2 .

QUIZ!

À la suite d'une étude, on a calculé un intervalle de confiance à 99% pour μ : $[2, 26; 3, 41]$.

Vrai, faux ou manque d'information ?

1. Au seuil de 1%, on rejette $H_0 : \mu = 3$ pour $H_1 : \mu \neq 3$.
2. Au seuil de 1%, on rejette $H_0 : \mu = 4$ pour $H_1 : \mu \neq 4$.
3. Au seuil de 5%, on rejette $H_0 : \mu = 3$ pour $H_1 : \mu \neq 3$.
4. Au seuil de 5%, on rejette $H_0 : \mu = 4$ pour $H_1 : \mu \neq 4$.

Réponses des exemples

Réponses des exemples

- **Exemple 1 (retour) (seuil observé, $\bar{x} = 0,111$) :** $z_0 \approx 1,74$, **donc** $\alpha^* = P(Z > 1,74) \approx 0,041$.
- **Exemple 2 (remboursement, $n = 20$, $\bar{x} = 1060$, $\sigma = 100$) :** $z_0 \approx -1,79$; **au seuil 5 % ($H_1 : \mu < 1100$), on rejette H_0 ; valeur-p $\approx 0,037$. Conclusion : preuve suffisante que le remboursement moyen est inférieur à 1100 \$.**
- **Exemple 3 (puissance, $n = 16$, $\sigma^2 = 64$, $\alpha = 0,10$) :** **si $\mu = 11$, puissance $\approx 0,218$.**
- **Exemple 3 (retour) : taille d'échantillon nécessaire pour une puissance de 80 % si $\mu = 11$: $n \approx 289$.**
- **Exemple 4 (transistors, $n = 20$, $\bar{x} = 152$, $s = 10$, $\mu_0 = 155$, $\alpha = 0,01$) :** $t_0 \approx -1,34$; $|t_0| < t_{0,005;19} \approx 2,86$, **on ne rejette pas H_0 . Conclusion : pas assez de preuve que le coefficient moyen a changé.**
- **Exemple 5 (sacs de sucre, $n = 31$, $s^2 = 8,2$, $\sigma_0^2 = 7$, $\alpha = 0,05$) :** $u_0 \approx 35,14 < \chi_{0,05;30}^2 \approx 43,77$, **on ne rejette pas H_0 . Conclusion : pas de preuve suffisante que la variance est trop grande.**

Réponses des quiz

Réponses des quiz

- Quiz (béton, résistance moyenne, $\bar{x} = 81,6$) : (1) $H_0 : \mu = 80$ contre $H_1 : \mu > 80$; (2) non, on ne peut pas conclure seulement parce que $\bar{x} > 80$; un écart positif peut survenir par pur hasard d'échantillonnage même si $\mu = 80$, il faut un test formel.
- Quiz (valeur-p = 0,09 pour $H_0 : \mu = 5$ contre $H_1 : \mu < 5$, $n = 20$) : (1) Vrai; (2) Faux; (3) Vrai; (4) manque d'information; (5) manque d'information; (6) Faux (un n plus grand rendrait le seuil observé plus *petit*, pas plus élevé).
- Quiz (IC 99% [2,26; 3,41] pour μ) : (1) Faux; (2) Vrai; (3) manque d'information (l'IC à 95% n'est pas donné); (4) Vrai (4 est hors de l'IC à 99%, donc aussi hors de l'IC, plus étroit, à 95%).

Bibliographie

Ce document est rédigé avec Beamer ainsi qu'une classe .cls fournie par Jérôme Soucy. Les diapositives sont adaptées des diapositives créées par Thierry Duchesne et Emmanuelle Reny-Nolin pour le cours STT-1900. Les graphiques proviennent de ces mêmes diapositives.

Pour signaler une erreur dans ce document, veuillez écrire à l'adresse : julien.miron@mat.ulaval.ca.